Gravitační pole

Využití multimédií při výuce fyziky

Texty k multimediální prezentaci

Jan Hrnčíř

jan.hrncir@gfxs.cz

Martin Klejch

martin.klejch@gfxs.cz

Gymnázium F. X. Šaldy Liberec

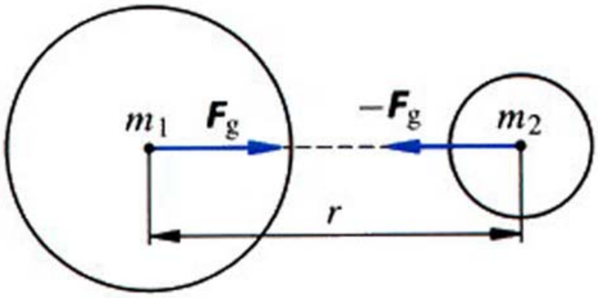
Obsah

1. Gravitační pole

V této kapitole se dozvíte o Newtonově gravitačním zákonu a porozumíte základním principům pohybů těles v gravitačním poli. Spíše byste měli pochopit, proč se vlastně dějí. Své nově nabyté znalosti si můžete ověřit na připravených fyzikálních úlohách.

1. 1. Newtonův gravitační zákon

Vlastnosti gravitačních sil studoval poprvé v 17. století Issac Newton, na základě pozorování pohybů Měsíce kolem Země a planet kolem Slunce. Napadla ho revoluční myšlenka: *Za všechno může gravitační síla!* Vztah, který odvodil pro velikost gravitačních sil, se nazývá Newtonův gravitační zákon.



Každá dvě stejnorodá tělesa kulovitého tvaru se navzájem přitahují stejně velkými gravitačními silami $\boldsymbol{F_g}$ a $\boldsymbol{-F_g}$ opačného směru.

$$F_g = \kappa \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

κ je gravitační konstanta

$\kappa \doteq 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$

Nyní se gravitační konstanta značí *G*.

Vztah můžeme použít i pro tělesa nestejnorodá a jiných než přesně kulovitých tvarů, pokud jsou rozměry těles zanedbatelné vzhledem k jejich vzdálenosti, neboli je můžeme považovat za hmotné body (například dvojice Země – Měsíc, Slunce – kometa, stanice ISS – Země). Podle gravitačního zákona jsou k Zemi přitahována tělesa na jejím povrchu (*r* je poloměr Země).

1. 2. Intenzita gravitačního pole

V okolí každého tělesa existuje gravitační pole, které působí na jiná tělesa. Pro porovnání silového působení v různých místech gravitačního pole je zavedena intenzita gravitačního pole. Intenzitu gravitačního pole ***K*** v daném místě pole definujeme jako podíl gravitační síly $\boldsymbol{F_g}$, která v tomto místě na hmotný bod působí, a hmotnosti *m* tohoto bodu.

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{F_g}}{\mathbf{m}}$$

Intenzita gravitačního pole ***K*** je vektorová veličina stejného směru jako gravitační síla $\boldsymbol{F_g}$, která působí v daném místě na hmotný bod. $[K] = \mathrm{N \cdot kg^{-1}}$.

Velikost intenzity gravitačního pole ***K*** v daném místě pole určíme ze vztahu pro velikost gravitační síly vyjádřenou v gravitačním zákonu.

$$F_g = \kappa \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \qquad K = \kappa \cdot \frac{M}{r^2}$$

1. 3. Centrální gravitační pole

Vektor intenzity gravitačního pole vždy směřuje do středu tělesa o hmotnosti *M*. Takové pole je centrální gravitační pole a střed tělesa gravitační střed centrálního pole. Velikost intenzity gravitačního pole ve výšce *h* nad zemským povrchem je:

$$K = \kappa \cdot \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2}$$

M_Z je hmotnost Země ($5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg), R_Z poloměr Země ($6{,}37 \cdot 10^6$ m). Velikost intenzity se s rostoucí výškou nad povrchem Země zmenšuje. Když sledujeme gravitační pole Země na malých plochách, například na ploše o rozměrech několika set metrů čtverečních, lze gravitační pole považovat za homogenní.

1. 4. Homogenní gravitační pole

Pokud pozorujeme gravitační pole na malém území (například o velikosti sta čtverečních metrů), můžeme gravitační pole považovat za homogenní. Intenzita homogenního gravitačního pole je konstantní.

2. Gravitační a tíhové zrychlení

V této kapitole se dozvíte základní zákonitosti ovlivňující zemskou gravitaci a pochopíte rozdíl mezi gravitační a tíhovou silou. Je pro Vás nachystána také fyzikální úloha k otestování Vašich znalostí.

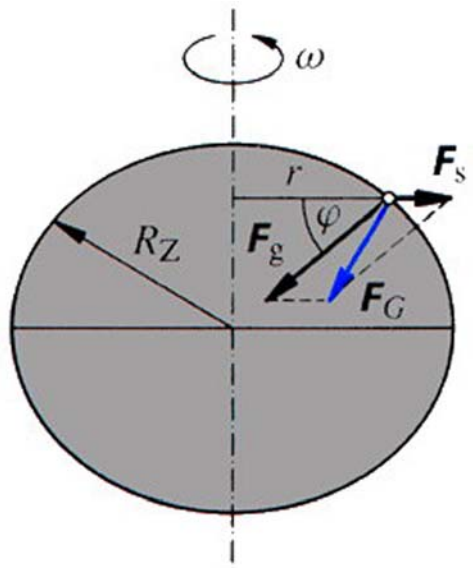
2. 1. Gravitační a tíhová síla

Již víme, že kolem každého tělesa existuje gravitační pole, které se projevuje silovým působením na jiná tělesa. Z Newtonova gravitačního zákona vyplývá, že velikost silového působení závisí na hmotnosti těles a na jejich vzdálenosti.

Gravitační síla udílí tělesu o hmotnosti *m* v daném bodě gravitační zrychlení:

$$\mathbf{a}_g = \frac{\mathbf{F}_g}{\mathbf{m}}$$

To znamená: intenzita gravitačního pole v daném místě se rovná gravitačnímu zrychlení, které v tomto místě uděluje tělesu gravitační síla ($\boldsymbol{K} = \boldsymbol{a_g}$). Na povrchu Země je gravitační zrychlení $a_g = 9{,}83\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.



Na Zemi se však setkáváme s tíhovou silou $\boldsymbol{F_G}$ a tíhovým zrychlením $\boldsymbol{g}$. Ty se od gravitační síly, resp. gravitačního zrychlení liší. Je to proto, že Země se otáčí kolem své osy. Na povrchu Země působí kromě gravitační síly $\boldsymbol{F_g}$ ještě setrvačná odstředivá síla $\boldsymbol{F_s}$. Vzniká při otáčení Země kolem své osy (otáčející se soustava je neinerciální soustava), proto celková tíhová síla $\boldsymbol{F_G}$ je jejich vektorovým součtem. Její směr označujeme jako svislý a určujeme ho volně zavěšenou olovnicí.

Sledujeme-li účinky gravitační síly v poměrně malých oblastech gravitačního pole Země, můžeme gravitační zrychlení a gravitační sílu považovat za konstantní, protože změny jejich velikosti a směru působení se blíží nule.

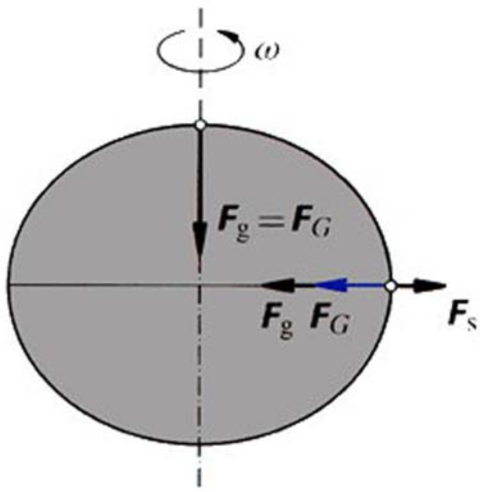
2. 2. Tíhová síla a tíha tělesa

Svislý směr je směr tíhové síly a směr tíhového zrychlení, ale není to vždy směr do středu Země (do středu země tíhová síla směřuje jen na pólech a na rovníku). Prostor, kde se projevují tíhové síly, se označuje jako tíhové pole. Pro velikost odstředivé síly $\boldsymbol{F_s}$ platí:

$$F_S = \frac{m \cdot v^2}{R_Z} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot r^2}{R_Z} = m \cdot \omega^2 \cdot R_Z \cdot \cos^2 \alpha$$

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$
$$T = 1\ \text{den}$$
$$E = m \cdot g \cdot h$$

r je vzdálenost místa na povrchu Země od osy otáčení, ω úhlová rychlost otáčení země, R_Z je poloměr Země, α zeměpisná šířka místa. Z toho vyplývá, že největší odstředivá síla je na rovníku a nulová na pólech. Velikost tíhového zrychlení závisí na zeměpisné šířce a také na nadmořské výšce.



Na rovníku u mořské hladiny je 9,78 m·s^{-2}, na pólech 9,83 m·s^{-2}, v našich zeměpisných šířkách 9,81 m·s^{-2}, dohodou bylo stanoveno normální tíhové zrychlení 9,80665 m·s^{-2} (u hladiny moře na 45° severní šířky).

V malé oblasti na zemském povrchu lze tíhové pole považovat za homogenní. Od tíhové síly $\boldsymbol{F_G}$ odlišujeme tíhu tělesa $\boldsymbol{G}$. Tíhová síla vzniká působením tíhového pole Země na těleso, tíha tělesa vyjadřuje působení tělesa umístěného v tíhovém poli Země na jiná tělesa. Tíhová síla a tíha se také liší umístěním působiště. Působištěm tíhové síly je těžiště tělesa, zatímco působiště tíhy leží na stykové ploše tělesa s podložkou nebo v bodě závěsu. Na daném místě zemského povrchu má tíha i tíhová síla stejnou hodnotu a směr. Rozdíl mezi tíhou a tíhovou silou je nejzřetelnější v beztížném stavu (například při volném pádu). Zavěsíme-li těleso na siloměr v klidu, tíha tělesa protáhne pružinu a siloměr naměří tíhu tělesa. Pustíme-li těleso i se siloměrem, těleso přestane natahovat pružinu a siloměr naměří nulovou tíhu, ale těleso (i se siloměrem) pokračuje v letu, protože na něj působí tíhová síla.

3. Pohyby těles v homogenním tíhovém poli Země

Jedná se o pohyby těles, které probíhají v blízkosti země a jejichž trajektorie jsou vzhledem k rozměrům Země velmi malé. Kromě toho budeme předpokládat, že na pohybující se tělesa nepůsobí kromě tíhové síly žádné další síly, ani odporová síla vzduchu. Uvažujeme tedy o pohybech těles ve vakuu.

V homogenním tíhovém poli Země pozorujeme volný pád a tzv. složené pohyby (vrhy). Skládají se z volného pádu a rovnoměrného přímočarého pohybu. Podle směru pohybu dělíme vrhy na:

1. Svislý vrh vzhůru
2. Svislý vrh dolů
3. Vodorovný vrh
4. Šikmý vrh vzhůru

3. 1. Volný pád

Nejjednodušším pohybem v tíhovém poli Země je volný pád. Volný pád je rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením g a s nulovou počáteční rychlostí. Je součástí všech složitějších pohybů v homogenním tíhovém poli Země.

Tyto vzorce platí pro okamžitou rychlost a dráhu volného pádu:

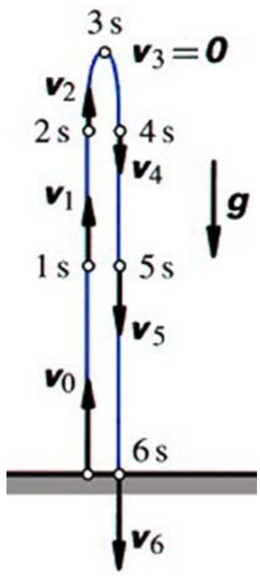
$$\mathbf{v} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{t} \qquad \mathbf{s} = \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{t}^2}{2}$$

3. 2. Svislý vrh vzhůru

Svislý vrh vzhůru se skládá z volného pádu a rovnoměrného přímočarého pohybu směrem vzhůru. Například míček, který si vyhodí tenista před podáním, kámen vyletující ze sopky, atd. Tyto vzorce platí pro okamžitou rychlost $\boldsymbol{v}$ a uraženou dráhu s v čase t:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{t}$$
$$\mathbf{s} = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{t} - \tfrac{1}{2} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{t}^2$$

v_0 je počáteční rychlost



Část svislého vrhu vzhůru, kdy hmotný bod stoupá, se nazývá výstup; hmotný bod při něm koná rovnoměrně zpomalený pohyb. Výstup končí, je-li okamžitá rychlost rovna nule. Potom následuje volný pád. Čas, po který bude výstup trvat, nazýváme dobou výstupu T. Hmotný bod vystoupá do výšky vrhu H.

Trajektorie svislého vrhu vzhůru je ve skutečnosti přímka. Na obrázku je výstup od volného pádu pro názornost oddělen.

$$H = v_0 \cdot T - \frac{1}{2} \cdot g \cdot T^2$$

$$H = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{v_0^{\ 2}}{g^2}$$

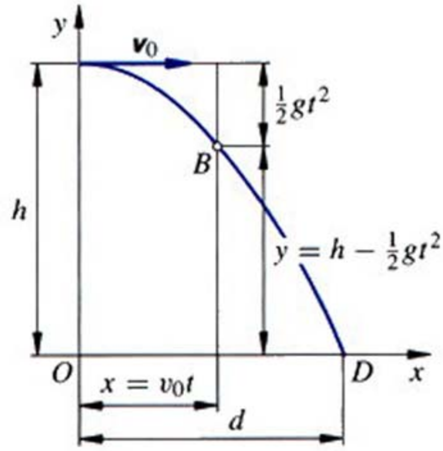
$$H = \frac{v_0^{\ 2}}{2 \cdot g}$$

Svislý vrh dolů se skládá z volného pádu a rovnoměrného přímočarého pohybu směrem dolů. Je to rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením $\boldsymbol{g}$ s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v_0}$.

Př.: Tento pohyb nastane, když hodíme kámen do propasti. Volný pád se liší tím, že při něm kámen volně pustíme z klidu (v_0 = 0 m·s^{-1}).

3. 3. Vodorovný vrh

Vodorovný vrh se skládá z volného pádu a rovnoměrného přímočarého pohybu směřujícího vodorovně s povrchem Země. Trajektorií je část paraboly, s vrcholem v místě vrhu. Například vytékající kapalina z vodorovně držené hadice, kulička, která přejede hranu vodorovného stolu, atd.



Délka vrhu je závislá na počáteční rychlosti $\boldsymbol{v_0}$ a na výšce *H*, ze které bylo těleso vrženo. Pro zjištění polohy hmotného bodu je nutno pohyb rozdělit na dvě části – svislou a vodorovnou.

Svislý pohyb je volný pád z výšky *H* a vodorovný pohyb je pohyb rovnoměrný přímočarý. Můžeme určit okamžitou polohu a rychlost jako součet obou pohybů a vzdálenost od místa dopadu *d*.

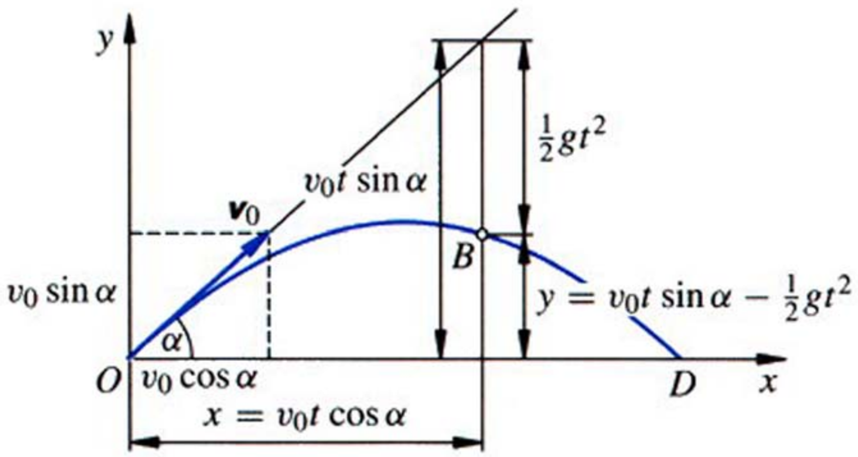
$$d = v_0 \cdot t \qquad h = H - \frac{g \cdot t^2}{2} \qquad T = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}} \qquad D = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}}$$

Okamžitou rychlost vodorovného vrhu získáme vektorovým součtem vodorovné a svislé rychlosti, kde vodorovná rychlost je stále stejná počáteční rychlosti a svislá odpovídá volnému pádu.

3. 4. Šikmý vrh vzhůru

Šikmý vrh se skládá z volného pádu a rovnoměrného přímočarého pohybu šikmo k povrchu Země. Délka vrhu závisí na počáteční rychlosti $\boldsymbol{v_0}$ a na elevačním úhlu α, pod kterým bylo těleso vrženo.

Chceme-li určit polohu a rychlost hmotného bod při šikmém vrhu, musíme si pohyb opět rozložit na svislý a vodorovný pohyb. Počáteční rychlost $\boldsymbol{v_0}$ musíme rozložit na vodorovnou počáteční rychlost $\boldsymbol{v_x}$ a svislou počáteční rychlost $\boldsymbol{v_y}$.



Okamžitá rychlost je dána vektorovým součtem svislé a vodorovné rychlosti. Okamžitá svislá rychlost se určí stejně jako u svislého vrhu vzhůru, vodorovná rychlost je stále stejná.

$$v_X = v_0 \cdot \cos\alpha$$
$$v_Y = v_0 \cdot \sin\alpha$$
$$x = v_X \cdot t = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha$$
$$y = v_Y \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

3. 5. Ochranná parabola

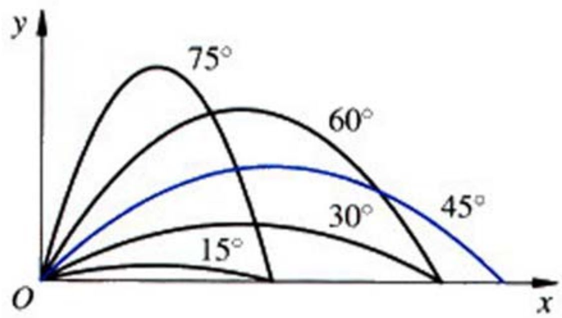
Ochranná parabola je křivka definující území, kde je možno zasáhnout daný bod za konstantní rychlosti. Pokud se nacházíte mimo tuto parabolu, nemůžete být zasaženi. Toto území je velmi důležité pro dělostřelce. Ti se zajímají o dostřel na ose *x*, protože parabola ohraničuje místa, která mohou zasáhnout.

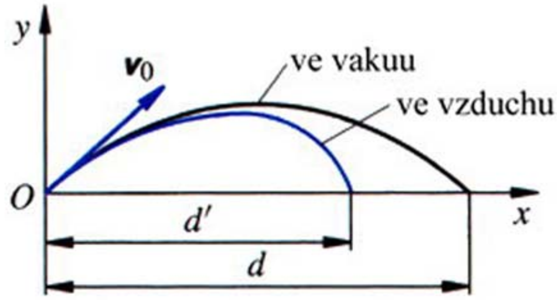
Jestli si chcete prohlédnout ochranné paraboly pro Vámi zadané rychlosti, klepněte na tlačítko simulace v rámečku 'Zobraz'.

3. 6. Šikmý vrh vzhůru při nezanedbatelném odporu vzduchu

Nejdůležitější hodnota šikmého vrhu vzhůru je jeho délka, ve vojenské terminologii nazývaná dostřel. Největší délky vrhu dosáhneme pod elevačním úhlem 45°. Délka vrhu je stejná pro dvojice α a $90° - \alpha$ … (například 15° a 75° ; 30° a 60°). Příklady z praxe: výstřel z děla ($\alpha < 45°$), z minometu ($\alpha > 45°$).

Trajektorie šikmého vrhu ve vakuu je parabola a balistická křivka ve vzduchu. Balistická křivka je vždy kratší než parabola, to je způsobeno odporovým silovým působením prostředí (odporová síla působí proti vodorovné složce rychlosti).





$$D = v_x \cdot T_D = v_0 \cdot T_D \cdot \cos\alpha$$

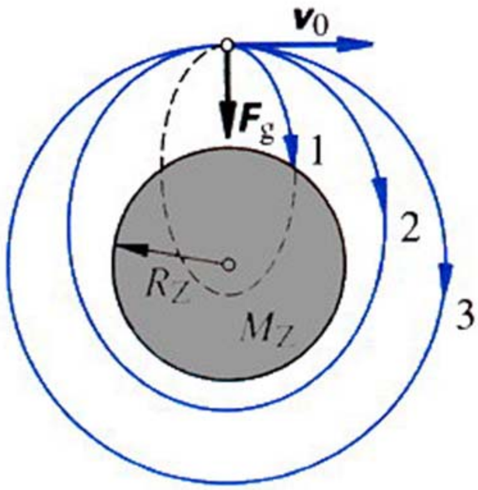
$$T_D = \frac{2 \cdot v_y}{g} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}{g}$$

$$D = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2 \cdot \alpha)}{g}$$

4. Pohyby těles v centrálním gravitačním poli Země

Vrhy jsou pohyby těles v homogenním tíhovém poli. U pohybů raket, družic či vesmírných lodí se musí počítat s tím, že už se pohybují v radiálním poli. Trajektorie družic záleží na jejich rychlosti. Vzhledem k této rychlosti může nastat šest případů, které si rozebereme dále.

4. 1. Kruhová rychlost



1) Poměrně malá počáteční rychlost – těleso se pohybuje po části elipsy než narazí na povrch Země. Část elipsy se zvětšuje s rychlostí tělesa.

2) Při větších rychlostech už těleso na zemský povrch nedopadne, ale opíše celou elipsu.

3) Při počáteční rychlosti $\boldsymbol{v_k}$ – kruhová rychlost – už těleso opisuje kružnici se středem ve středu Země. Na toto těleso působí jednak zemská gravitace $\boldsymbol{F_g}$ jednak odstředivá síla $\boldsymbol{F_O}$. Tyto síly jsou v rovnováze.

$$F_g = F_o$$

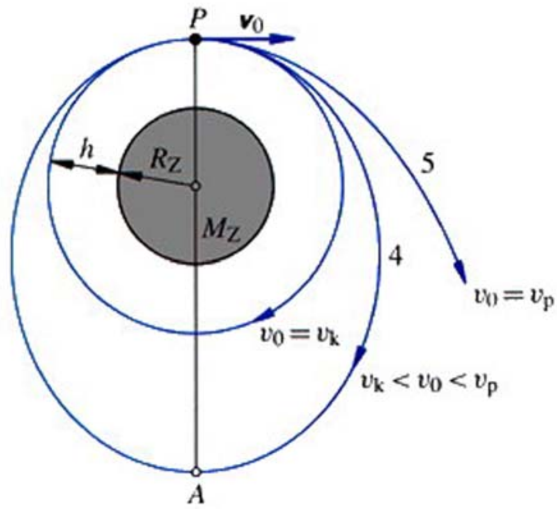
$$\kappa \cdot \frac{m \cdot M_Z}{(R_Z + h)^2} = \frac{m \cdot v_K^2}{R_Z + h}$$

$$v_K = \sqrt{\frac{\kappa \cdot M_Z}{R_Z + h}}$$

Velikost kruhové rychlosti v_k u zemského povrchu je 7,9 km·s^{-1}, což je první kosmická rychlost.

4. 2. Úniková rychlost

4) Při rychlostech vyšších je trajektorie opět eliptická. Rovina elipsy prochází středem Země, v němž leží jedno její ohnisko. Bod **P**, ve kterém má těleso nejmenší vzdálenost od Země, se nazývá *perigeum*. Bod **A**, ve kterém má těleso největší vzdálenost od Země, se nazývá *apogeum*. S rostoucí rychlostí je elipsa protáhlejší.



5) Eliptická trajektorie se mění na parabolickou a těleso se vzdaluje od Země. Rychlost v_p se nazývá parabolická, úniková. Pro uvedenou v_k = 7,9 km·s^{-1} je v_p = 11,2 km·s^{-1}, což je druhá kosmická rychlost.

$$v_p = v_k \cdot \sqrt{2}$$

6) Než těleso dosáhne další, třetí kosmické rychlosti, pohybuje se stále v gravitačním poli Slunce. Při dosažení třetí kosmické rychlosti opouští Sluneční soustavu.

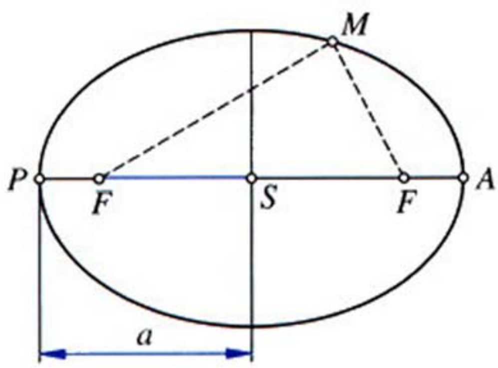
5. Pohyby těles v centrálním gravitačním poli Slunce

Nyní poznáte základní principy ovlivňující pohyby těles ve Sluneční soustavě (planety, asteroidy atd.). Jsou popsány Keplerovými zákony. Pochopitelně je pro Vás nachystána i fyzikální úloha, u níž si ověříte, zda jste vše správně pochopili.

5. 1. První Keplerův zákon

Planety obíhají kolem Slunce po elipsách málo se lišících od kružnic, jejichž společným ohniskem je Slunce.

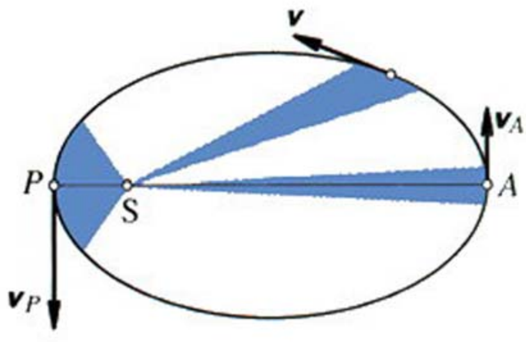
Vrchol elipsy **P**, v němž je planeta Slunci nejblíže, se nazývá *perihélium* (přísluní), vrchol **A**, v němž je planeta od Slunce nejdále, *afélium* (odsluní).



5. 2. Druhý Keplerův zákon

Plochy opsané průvodičem planety za jednotku času jsou konstantní.

Průvodič je úsečka, která spojuje střed planety se středem Slunce. Důsledek tohoto zákona je, že planety se v *perihéliu* pohybují rychleji než v *aféliu*.



5. 3. Třetí Keplerův zákon

Poměr druhých mocnin oběžných dob planet je roven poměru třetích mocnin jejich hlavních poloos.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Uvažujeme-li, že se planety pohybují po elipsách málo odlišných od kružnic, lze místo poloos dosadit střední vzdálenost od Slunce a vztah přibližně odpovídá.

Keplerovy zákony neplatí pouze pro planety ve Sluneční soustavě, ale i pro tělesa obíhající okolo Země (Měsíc, satelity, atd.)

Vzdálenosti ve Sluneční soustavě se měří v astronomických jednotkách AU, které odpovídají střední vzdálenosti Země od Slunce.

5. 4. Sluneční soustava

V naší Sluneční soustavě se pohybuje devět planet, ohromné množství asteroidů, planetoidů a komety, které navštěvují Sluneční soustavu jednou za stovky let. Kolem planet obíhají měsíce, pásy prachu a v případě Země také veliké množství satelitů, zbytků kosmických lodí a dalšího vesmírného odpadu. Keplerovy zákony platí stejně tak pro Jupiter jako pro posádku MIRu. Myslíte si, že je to komplikované? Máte pravdu, je to skutečně velice komplikované a to ještě nevíte všechno. Uvědomte si, že všechna tato tělesa působí na sebe navzájem, srážejí se, či (v případě interakce velkého a malého objektu) končí jako krátery na površích planet nebo jako obláčky žhavých plynů v atmosférách. A tohle všechno se dělo miliardy let, děje se nyní a pár dalších miliard let dít bude!

6. Shrnutí

Nyní byste měli alespoň trochu rozumět zákonům ovlivňujícím pohyby těles v gravitačním poli. Nemůžete ovšem provádět žádné astronomické výpočty, jelikož naše vzorce neuvažují se vzájemným působením gravitačních polí natož s komplikovanými nebo dlouhodobými účinky.

Pokud nám z nějakého nevysvětlitelného důvodu nevěříte, udělejte si tento experiment: Vezměte si Měsíc, nechte ho obíhat mezi Zemí a Sluncem, pozorujte ho alespoň tisíc let. Spočítejte si, kde by asi měl být a porovnejte to se skutečným stavem … měli jsme pravdu?

Teď ale vážně. Popsané zákony je těžké dokázat, neboť nepočítají s větrem, odporem vzduchu, třením (pohyby v homogenním tíhovém poli blízko povrchu Země) atd. V případě, že si chcete přesto vyzkoušet některý v praxi, doporučíme Vám tento pokus. Vezměte si kovovou kouli nebo kámen a nechte ho padat z nějaké vyšší budovy (dejte přitom pozor na kolemjdoucí), změřte si výšku budovy, hmotnost koule a dobu pádu. Vypočítejte délku pádu … je to pravda? Tento pokus má velikou výhodu: k jeho ovlivnění byste potřebovali tornádo nebo velmi vysokou budovu (aby se do výsledku promítl odpor vzduchu).

Pokud máte jakékoli otázky k celé této problematice, zeptejte se svého vyučujícího fyziky. Určitě Vám rád poskytne obsáhlý výklad.

Doufáme, že jste si náš projekt užili a děkujeme Vám za Vaši pozornost.